全国硕士研究生入学统一考试

数学考试大纲

2013年

2013 NIAN QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI SHUXUE KAOSHI DAGANG

教育部考试中心

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

2013年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲/教育部考试中心编. --北京:高等教育出版社,2012.8
ISBN 978-7-04-035963-3

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①教… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-考试大纲 Ⅳ. ①O13-41

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第185297号

策划编辑	刘 佳	责任编辑	雷旭波	封面设计	王 洋
版式设计	范晓红	责任印制	张福涛		

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司		http://www.hep.com.cn
开　　本	880mm×1230mm　1/32	版　　次	2012年8月第1版
印　　张	4.5	印　　次	2012年8月第1次印刷
字　　数	120千字	定　　价	18.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号　35963-00

目　　录

Ⅰ 考试性质

数学考试是为高等院校和科研院所招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有选拔性质的全国统一入学考试科目，其目的是科学、公平、有效地测试考生是否具备继续攻读硕士学位所需要的数学知识和能力，评价的标准是高等学校优秀本科毕业生能达到的及格或及格以上水平，以利于各高等院校和科研院所择优选拔，确保硕士研究生的招生质量.

Ⅱ

要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论，掌握数学的基本方法，具备抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力.

Ⅲ

根据工学、经济学、管理学各学科、专业对硕士研究生入学所应具

备的数学知识和能力的不同要求，硕士研究生入学统考数学试卷分为3种，其中针对工学门类的为数学（一）、数学（二），针对经济学和管理学门类的为数学（三）.招生专业须使用的试卷种类规定如下：

一、须使用数学（一）的招生专业

1. 工学门类中的力学、机械工程、光学工程、仪器科学与技术、冶金工程、动力工程及工程热物理、电气工程、电子科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程、计算机科学与技术、土木工程、水利工程、测绘科学与技术、交通运输工程、船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、兵器科学与技术、核科学与技术、生物医学工程等20个一级学科中所有的二级学科、专业.

2. 授工学学位的管理科学与工程一级学科.

二、须使用数学（二）的招生专业

工学门类中的纺织科学与工程、轻工技术与工程、农业工程、林业工程、食品科学与工程等5个一级学科中所有的二级学科、专业.

三、须选用数学（一）或数学（二）的招生专业（由招生单位自定）

工学门类中的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业选用数学（一），对数学要求较低的选用数学（二）.

四、须使用数学（三）的招生专业

1. 经济学门类的各一级学科.
2. 管理学门类中的工商管理、农林经济管理一级学科.
3. 授管理学学位的管理科学与工程一级学科.

Ⅳ 考试形式和试卷结构

一、试卷满分及考试时间

各卷种试卷满分均为 150 分，考试时间为 180 分钟.

二、答题方式

答题方式为闭卷、笔试.

三、试卷内容结构

考试内容 \ 分值比例 \ 卷种	数学(一)	数学(二)	数学(三)
高等数学(或微积分)	56%	78%	56%
线性代数	22%	22%	22%
概率论与数理统计	22%	——	22%

四、试卷题型结构

各卷种试卷题型结构均为：

单项选择题　　8 小题，每小题 4 分，共 32 分

填空题　　6 小题，每小题 4 分，共 24 分

解答题(包括证明题)　　9 小题，共 94 分

V

数学(一)

高等数学

一、函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小量和无穷大量的概念及其关系　无穷小量的性质及无穷小量的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、一元函数微分学

考试内容

导数和微分的概念　导数的几何意义和物理意义　函数的可导性与连续性之间的关系　平面曲线的切线和法线　导数和微分的四则运算　基本初等函数的导数　复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法　高阶导数　一阶微分形式的不变性　微分中值定理　洛必达(L'Hospital)法则　函数单调性的判别　函数的极值　函数图形的凹凸性、拐点及渐近线　函数图形的描绘　函数的最大值与最小值　弧微分　曲率的概念　曲率圆与曲率半径

考试要求

1. 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量,理解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式.了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.

3. 了解高阶导数的概念,会求简单函数的高阶导数.

4. 会求分段函数的导数,会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

5. 理解并会用罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理,了解并会用柯西(Cauchy)中值定理.

6. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

7. 理解函数的极值概念,掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法,掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.

8. 会用导数判断函数图形的凹凸性(注:在区间(a,b)内,设函数$f(x)$具有二阶导数.当$f''(x)>0$时,$f(x)$的图形是凹的;当$f''(x)<0$时,$f(x)$的图形是凸的),会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线,会描绘函数的图形.

9. 了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念,会计算曲率和曲率半径.

三、一元函数积分学

考试内容

原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　积分上限的函数及其导数　牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式　不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法　有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分　反常(广义)积分　定积分的应用

考试要求

1. 理解原函数的概念,理解不定积分和定积分的概念.

2. 掌握不定积分的基本公式,掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理,掌握换元积分法与分部积分法.

3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

4. 理解积分上限的函数,会求它的导数,掌握牛顿-莱布尼茨

公式.

5. 了解反常积分的概念,会计算反常积分.

6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等)及函数的平均值.

四、向量代数和空间解析几何

考试内容

向量的概念　向量的线性运算　向量的数量积和向量积　向量的混合积　两向量垂直、平行的条件　两向量的夹角　向量的坐标表达式及其运算　单位向量　方向数与方向余弦　曲面方程和空间曲线方程的概念　平面方程　直线方程　平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件　点到平面和点到直线的距离　球面　柱面　旋转曲面　常用的二次曲面方程及其图形　空间曲线的参数方程和一般方程　空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

考试要求

1. 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积),了解两个向量垂直、平行的条件.

3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式,掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法.

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角,并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

6. 会求点到直线以及点到平面的距离.

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形,会求简单的柱面和旋转曲面的方程.

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程.了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求该投影曲线的方程.

五、多元函数微分学

考试内容

多元函数的概念 二元函数的几何意义 二元函数的极限与连续的概念 有界闭区域上多元连续函数的性质 多元函数的偏导数和全微分 全微分存在的必要条件和充分条件 多元复合函数、隐函数的求导法 二阶偏导数 方向导数和梯度 空间曲线的切线和法平面 曲面的切平面和法线 二元函数的二阶泰勒公式 多元函数的极值和条件极值 多元函数的最大值、最小值及其简单应用

考试要求

1. 理解多元函数的概念,理解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念,会求全微分,了解全微分存在的必要条件和充分条件,了解全微分形式的不变性.

4. 理解方向导数与梯度的概念,并掌握其计算方法.

5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

6. 了解隐函数存在定理,会求多元隐函数的偏导数.

7. 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程.

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

六、多元函数积分学

考试内容

二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用 两类曲线积分的概念、性质及计算 两类曲线积分的关系 格林(Green)公式 平面

曲线积分与路径无关的条件　二元函数全微分的原函数　两类曲面积分的概念、性质及计算　两类曲面积分的关系　高斯(Gauss)公式　斯托克斯(Stokes)公式　散度、旋度的概念及计算　曲线积分和曲面积分的应用

考试要求

1. 理解二重积分、三重积分的概念,了解重积分的性质,了解二重积分的中值定理.

2. 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标),会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).

3. 理解两类曲线积分的概念,了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.

4. 掌握计算两类曲线积分的方法.

5. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件,会求二元函数全微分的原函数.

6. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系,掌握计算两类曲面积分的方法,掌握用高斯公式计算曲面积分的方法,并会用斯托克斯公式计算曲线积分.

7. 了解散度与旋度的概念,并会计算.

8. 会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、形心、转动惯量、引力、功及流量等).

七、无穷级数

考试内容

常数项级数的收敛与发散的概念　收敛级数的和的概念　级数的基本性质与收敛的必要条件　几何级数与 p 级数及其收敛性　正项级数收敛性的判别法　交错级数与莱布尼茨定理　任意项级数的绝对收敛与条件收敛　函数项级数的收敛域与和函数的概念　幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)和收敛域　幂级数的和函数　幂级数在其收敛区间内的基本性质　简单幂级数的和函数的求法　初等函数的

幂级数展开式　函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数　狄利克雷(Dirichlet)定理　函数在$[-l,l]$上的傅里叶级数　函数在$[0,l]$上的正弦级数和余弦级数

考试要求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念,掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.

2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件.

3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法,会用根值判别法.

4. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法.

5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.

6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.

7. 理解幂级数收敛半径的概念,并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

8. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分),会求一些幂级数在收敛区间内的和函数,并会由此求出某些数项级数的和.

9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.

10. 掌握 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式,会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

11. 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理,会将定义在$[-l,l]$上的函数展开为傅里叶级数,会将定义在$[0,l]$上的函数展开为正弦级数与余弦级数,会写出傅里叶级数的和函数的表达式.

八、常微分方程

考试内容

常微分方程的基本概念　变量可分离的微分方程　齐次微分方程　一阶线性微分方程　伯努利(Bernoulli)方程　全微分方程　可用简单的变量代换求解的某些微分方程　可降阶的高阶微分方程　线性微

分方程解的性质及解的结构定理　二阶常系数齐次线性微分方程　高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程　简单的二阶常系数非齐次线性微分方程　欧拉(Euler)方程　微分方程的简单应用

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法.

3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程,会用简单的变量代换解某些微分方程.

4. 会用降阶法解下列形式的微分方程:$y^{(n)}=f(x)$,$y''=f(x,y')$和$y''=f(y,y')$.

5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构.

6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法,并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.

7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.

8. 会解欧拉方程.

9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

线性代数

一、行列式

考试内容

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二、矩阵

考试内容

矩阵的概念　矩阵的线性运算　矩阵的乘法　方阵的幂　方阵乘

积的行列式　矩阵的转置　逆矩阵的概念和性质　矩阵可逆的充分必要条件　伴随矩阵　矩阵的初等变换　初等矩阵　矩阵的秩　矩阵的等价　分块矩阵及其运算

考试要求

1. 理解矩阵的概念,了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律,了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3. 理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件,理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 理解矩阵初等变换的概念,了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念,理解矩阵的秩的概念,掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

5. 了解分块矩阵及其运算.

三、向量

考试内容

向量的概念　向量的线性组合与线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量空间及其相关概念　n 维向量空间的基变换和坐标变换　过渡矩阵　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法　规范正交基　正交矩阵及其性质

考试要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.

2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念,掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念,会求向量组的极大线性无关组及秩.

4. 理解向量组等价的概念,理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.

5．了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念．

6．了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵．

7．了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法．

8．了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质．

四、线性方程组

考试内容

线性方程组的克拉默(Cramer)法则　齐次线性方程组有非零解的充分必要条件　非齐次线性方程组有解的充分必要条件　线性方程组解的性质和解的结构　齐次线性方程组的基础解系和通解　解空间　非齐次线性方程组的通解

考试要求

1．会用克拉默法则．

2．理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件．

3．理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法．

4．理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念．

5．掌握用初等行变换求解线性方程组的方法．

五、矩阵的特征值和特征向量

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似变换、相似矩阵的概念及性质　矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵

考试要求

1．理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量．

2．理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条

件,掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

六、二次型

考试内容

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

考试要求

1. 掌握二次型及其矩阵表示,了解二次型秩的概念,了解合同变换与合同矩阵的概念,了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.

2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法,会用配方法化二次型为标准形.

3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念,并掌握其判别法.

概率论与数理统计

一、随机事件和概率

考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式.

3. 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理

解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

二、随机变量及其分布

考试内容

随机变量　随机变量分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的分布　随机变量函数的分布

考试要求

1. 理解随机变量的概念,理解分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的概念及性质,会计算与随机变量相联系的事件的概率.

2. 理解离散型随机变量及其概率分布的概念,掌握 0–1 分布、二项分布 $B(n,p)$、几何分布、超几何分布、泊松(Poisson)分布 $P(\lambda)$ 及其应用.

3. 了解泊松定理的结论和应用条件,会用泊松分布近似表示二项分布.

4. 理解连续型随机变量及其概率密度的概念,掌握均匀分布 $U(a,b)$、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用,其中参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的指数分布 $E(\lambda)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

5. 会求随机变量函数的分布.

三、多维随机变量及其分布

考试内容

多维随机变量及其分布　二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布　二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度　随机变量的独立性和不相关性　常用二维随机变量的分布　两个及两个以上随机变量简单函数的分布

考试要求

1. 理解多维随机变量的概念,理解多维随机变量的分布的概念和

性质，理解二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布，理解二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度，会求与二维随机变量相关事件的概率.

2. 理解随机变量的独立性及不相关性的概念，掌握随机变量相互独立的条件.

3. 掌握二维均匀分布，了解二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的概率密度，理解其中参数的概率意义.

4. 会求两个随机变量简单函数的分布，会求多个相互独立随机变量简单函数的分布.

四、随机变量的数字特征

考试内容

随机变量的数学期望(均值)、方差、标准差及其性质　随机变量函数的数学期望　矩、协方差、相关系数及其性质

考试要求

1. 理解随机变量数字特征(数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数)的概念，会运用数字特征的基本性质，并掌握常用分布的数字特征.

2. 会求随机变量函数的数学期望.

五、大数定律和中心极限定理

考试内容

切比雪夫(Chebyshev)不等式　切比雪夫大数定律　伯努利(Bernoulli)大数定律　辛钦(Khinchine)大数定律　棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理　列维-林德伯格(Levy-Lindberg)定理

考试要求

1. 了解切比雪夫不等式.

2. 了解切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律(独立同分布随机变量序列的大数定律).

3. 了解棣莫弗-拉普拉斯定理(二项分布以正态分布为极限分

布)和列维–林德伯格定理(独立同分布随机变量序列的中心极限定理).

六、数理统计的基本概念

考试内容

总体　个体　简单随机样本　统计量　样本均值　样本方差和样本矩　χ^2 分布　t 分布　F 分布　分位数　正态总体的常用抽样分布

考试要求

1. 理解总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩的概念,其中样本方差定义为

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

2. 了解 χ^2 分布、t 分布和 F 分布的概念及性质,了解上侧 α 分位数的概念并会查表计算.

3. 了解正态总体的常用抽样分布.

七、参数估计

考试内容

点估计的概念　估计量与估计值　矩估计法　最大似然估计法　估计量的评选标准　区间估计的概念　单个正态总体的均值和方差的区间估计　两个正态总体的均值差和方差比的区间估计

考试要求

1. 理解参数的点估计、估计量与估计值的概念.

2. 掌握矩估计法(一阶矩、二阶矩)和最大似然估计法.

3. 了解估计量的无偏性、有效性(最小方差性)和一致性(相合性)的概念,并会验证估计量的无偏性.

4. 理解区间估计的概念,会求单个正态总体的均值和方差的置信区间,会求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间.

八、假设检验

考试内容

显著性检验 假设检验的两类错误 单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验

考试要求

1. 理解显著性检验的基本思想，掌握假设检验的基本步骤，了解假设检验可能产生的两类错误.

2. 掌握单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验.

数 学（二）

高 等 数 学

一、函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立 数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限与右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、一元函数微分学

考试内容

导数和微分的概念　导数的几何意义和物理意义　函数的可导性与连续性之间的关系　平面曲线的切线和法线　导数和微分的四则运算　基本初等函数的导数　复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法　高阶导数　一阶微分形式的不变性　微分中值定理　洛必达(L'Hospital)法则　函数单调性的判别　函数的极值　函数图形的凹凸性、拐点及渐近线　函数图形的描绘　函数的最大值与最小值　弧微分　曲率的概念　曲率圆与曲率半径

考试要求

1. 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量,理解函数的可导性与连续性之间

的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式.了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.

3. 了解高阶导数的概念,会求简单函数的高阶导数.

4. 会求分段函数的导数,会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

5. 理解并会用罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理,了解并会用柯西(Cauchy)中值定理.

6. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

7. 理解函数的极值概念,掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法,掌握函数的最大值和最小值的求法及其应用.

8. 会用导数判断函数图形的凹凸性(注:在区间(a,b)内,设函数$f(x)$具有二阶导数.当$f''(x)>0$时,$f(x)$的图形是凹的;当$f''(x)<0$时,$f(x)$的图形是凸的),会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线,会描绘函数的图形.

9. 了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念,会计算曲率和曲率半径.

三、一元函数积分学

考试内容

原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　积分上限的函数及其导数　牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式　不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法　有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分　反常(广义)积分　定积分的应用

考试要求

1. 理解原函数的概念,理解不定积分和定积分的概念.

2. 掌握不定积分的基本公式,掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理,掌握换元积分法与分部积分法.

3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

4. 理解积分上限的函数,会求它的导数,掌握牛顿-莱布尼茨公式.

5. 了解反常积分的概念,会计算反常积分.

6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等)及函数平均值.

四、多元函数微积分学

考试内容

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限与连续的概念　有界闭区域上二元连续函数的性质　多元函数的偏导数和全微分　多元复合函数、隐函数的求导法　二阶偏导数　多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值　二重积分的概念、基本性质和计算

考试要求

1. 了解多元函数的概念,了解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续的概念,了解有界闭区域上二元连续函数的性质.

3. 了解多元函数偏导数与全微分的概念,会求多元复合函数一阶、二阶偏导数,会求全微分,了解隐函数存在定理,会求多元隐函数的偏导数.

4. 了解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

5. 了解二重积分的概念与基本性质,掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标).

五、常微分方程

考试内容

常微分方程的基本概念　变量可分离的微分方程　齐次微分方程

一阶线性微分方程 可降阶的高阶微分方程 线性微分方程解的性质及解的结构定理 二阶常系数齐次线性微分方程 高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程 微分方程的简单应用

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法,会解齐次微分方程.

3. 会用降阶法解下列形式的微分方程:$y^{(n)}=f(x)$,$y''=f(x,y')$和$y''=f(y,y')$.

4. 理解二阶线性微分方程解的性质及解的结构定理.

5. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法,并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.

6. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.

7. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

线性代数

一、行列式

考试内容

行列式的概念和基本性质 行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二、矩阵

考试内容

矩阵的概念 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 方阵的幂 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必

要条件　伴随矩阵　矩阵的初等变换　初等矩阵　矩阵的秩　矩阵的等价　分块矩阵及其运算

考试要求

1. 理解矩阵的概念,了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵和正交矩阵以及它们的性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律,了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3. 理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件.理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 了解矩阵初等变换的概念,了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念,理解矩阵的秩的概念,掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

5. 了解分块矩阵及其运算.

三、向量

考试内容

向量的概念　向量的线性组合和线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法

考试要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.

2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念,掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

3. 了解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念,会求向量组的极大线性无关组及秩.

4. 了解向量组等价的概念,了解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩的关系.

5. 了解内积的概念,掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.

四、线性方程组

考试内容

线性方程组的克拉默(Cramer)法则　齐次线性方程组有非零解的充分必要条件　非齐次线性方程组有解的充分必要条件　线性方程组解的性质和解的结构　齐次线性方程组的基础解系和通解　非齐次线性方程组的通解

考试要求

1. 会用克拉默法则.

2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

3. 理解齐次线性方程组的基础解系及通解的概念,掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.

4. 理解非齐次线性方程组的解的结构及通解的概念.

5. 会用初等行变换求解线性方程组.

五、矩阵的特征值和特征向量

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似矩阵的概念及性质　矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵

考试要求

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质,会求矩阵的特征值和特征向量.

2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件,会将矩阵化为相似对角矩阵.

3. 理解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

六、二次型

考试内容

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

考试要求

1. 了解二次型的概念,会用矩阵形式表示二次型,了解合同变换与合同矩阵的概念.

2. 了解二次型的秩的概念,了解二次型的标准形、规范形等概念,了解惯性定理,会用正交变换和配方法化二次型为标准形.

3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念,并掌握其判别法.

数学(三)

微积分

一、函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小量和无穷大量的概念及其关系　无穷小量的性质及无穷小量的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数

关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、一元函数微分学

考试内容

导数和微分的概念　导数的几何意义和经济意义　函数的可导性与连续性之间的关系　平面曲线的切线与法线　导数和微分的四则运算　基本初等函数的导数　复合函数、反函数和隐函数的微分法　高阶导数　一阶微分形式的不变性　微分中值定理　洛必达(L'Hospital)法则　函数单调性的判别　函数的极值　函数图形的凹凸性、拐点及渐近线　函数图形的描绘　函数的最大值与最小值

考试要求

1. 理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系,了解导数的几何意义与经济意义(含边际与弹性的概念),会求平面曲线的切线方程和法线方程.

2. 掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则,会求分段函数的导数,会求反函数与隐函数的导数.

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.

4. 了解微分的概念、导数与微分之间的关系以及一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.

5. 理解罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理，了解泰勒（Taylor）定理、柯西（Cauchy）中值定理，掌握这四个定理的简单应用.

6. 会用洛必达法则求极限.

7. 掌握函数单调性的判别方法，了解函数极值的概念，掌握函数极值、最大值和最小值的求法及其应用.

8. 会用导数判断函数图形的凹凸性（注：在区间(a,b)内，设函数$f(x)$具有二阶导数. 当$f''(x)>0$时，$f(x)$的图形是凹的；当$f''(x)<0$时，$f(x)$的图形是凸的），会求函数图形的拐点和渐近线.

9. 会描绘简单函数的图形.

三、一元函数积分学

考试内容

原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　积分上限的函数及其导数　牛顿-莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式　不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法　反常（广义）积分　定积分的应用

考试要求

1. 理解原函数与不定积分的概念，掌握不定积分的基本性质和基本积分公式，掌握不定积分的换元积分法与分部积分法.

2. 了解定积分的概念和基本性质，了解定积分中值定理，理解积分上限的函数并会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式以及定积分的换元积分法和分部积分法.

3. 会利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值，会利用定积分求解简单的经济应用问题.

4. 了解反常积分的概念，会计算反常积分.

四、多元函数微积分学

考试内容

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限与连续的概念　有界闭区域上二元连续函数的性质　多元函数偏导数的概念与计算　多元复合函数的求导法与隐函数求导法　二阶偏导数　全微分　多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值　二重积分的概念、基本性质和计算　无界区域上简单的反常二重积分

考试要求

1. 了解多元函数的概念，了解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续的概念，了解有界闭区域上二元连续函数的性质.

3. 了解多元函数偏导数与全微分的概念，会求多元复合函数一阶、二阶偏导数，会求全微分，会求多元隐函数的偏导数.

4. 了解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决简单的应用问题.

5. 了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算.

五、无穷级数

考试内容

常数项级数的收敛与发散的概念　收敛级数的和的概念　级数的基本性质与收敛的必要条件　几何级数与 p 级数及其收敛性　正项级数收敛性的判别法　任意项级数的绝对收敛与条件收敛　交错级数与莱布尼茨定理　幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域　幂级数的和函数　幂级数在其收敛区间内的基本性质　简单幂级数的和函数的求法　初等函数的幂级数展开式

考试要求

1. 了解级数的收敛与发散、收敛级数的和的概念.

2. 了解级数的基本性质及级数收敛的必要条件,掌握几何级数及 p 级数的收敛与发散的条件,掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法.

3. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系,了解交错级数的莱布尼茨判别法.

4. 会求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域.

5. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分),会求简单幂级数在其收敛区间内的和函数.

6. 了解 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 与 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式.

六、常微分方程与差分方程

考试内容

常微分方程的基本概念　变量可分离的微分方程　齐次微分方程　一阶线性微分方程　线性微分方程解的性质及解的结构定理　二阶常系数齐次线性微分方程及简单的非齐次线性微分方程　差分与差分方程的概念　差分方程的通解与特解　一阶常系数线性差分方程　微分方程的简单应用

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

2. 掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法.

3. 会解二阶常系数齐次线性微分方程.

4. 了解线性微分方程解的性质及解的结构定理,会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程.

5. 了解差分与差分方程及其通解与特解等概念.

6. 了解一阶常系数线性差分方程的求解方法.

7. 会用微分方程求解简单的经济应用问题.

线性代数

一、行列式

考试内容

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二、矩阵

考试内容

矩阵的概念　矩阵的线性运算　矩阵的乘法　方阵的幂　方阵乘积的行列式　矩阵的转置　逆矩阵的概念和性质　矩阵可逆的充分必要条件　伴随矩阵　矩阵的初等变换　初等矩阵　矩阵的秩　矩阵的等价　分块矩阵及其运算

考试要求

1. 理解矩阵的概念,了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵的定义及性质,了解对称矩阵、反对称矩阵及正交矩阵等的定义和性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律,了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3. 理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件,理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 了解矩阵的初等变换和初等矩阵及矩阵等价的概念,理解矩阵的秩的概念,掌握用初等变换求矩阵的逆矩阵和秩的方法.

5. 了解分块矩阵的概念,掌握分块矩阵的运算法则.

三、向量

考试内容

向量的概念　向量的线性组合与线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法

考试要求

1. 了解向量的概念,掌握向量的加法和数乘运算法则.

2. 理解向量的线性组合与线性表示、向量组线性相关、线性无关等概念,掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

3. 理解向量组的极大线性无关组的概念,会求向量组的极大线性无关组及秩.

4. 理解向量组等价的概念,理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.

5. 了解内积的概念,掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.

四、线性方程组

考试内容

线性方程组的克拉默(Cramer)法则　线性方程组有解和无解的判定　齐次线性方程组的基础解系和通解　非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组(导出组)的解之间的关系　非齐次线性方程组的通解

考试要求

1. 会用克拉默法则解线性方程组.

2. 掌握非齐次线性方程组有解和无解的判定方法.

3. 理解齐次线性方程组的基础解系的概念,掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.

4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.

5．掌握用初等行变换求解线性方程组的方法．

五、矩阵的特征值和特征向量

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似矩阵的概念及性质　矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵

考试要求

1．理解矩阵的特征值、特征向量的概念，掌握矩阵特征值的性质，掌握求矩阵特征值和特征向量的方法．

2．理解矩阵相似的概念，掌握相似矩阵的性质，了解矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法．

3．掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质．

六、二次型

考试内容

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

考试要求

1．了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解合同变换与合同矩阵的概念．

2．了解二次型的秩的概念，了解二次型的标准形、规范形等概念，了解惯性定理，会用正交变换和配方法化二次型为标准形．

3．理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法．

概率论与数理统计

一、随机事件和概率

考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式等.

3. 理解事件的独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

二、随机变量及其分布

考试内容

随机变量　随机变量分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的分布　随机变量函数的分布

考试要求

1. 理解随机变量的概念,理解分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的概念及性质,会计算与随机变量相联系的事件的概率.

2. 理解离散型随机变量及其概率分布的概念,掌握0-1分布、二项分布$B(n,p)$、几何分布、超几何分布、泊松(Poisson)分布$P(\lambda)$及其应用.

3. 掌握泊松定理的结论和应用条件,会用泊松分布近似表示二项分布.

4. 理解连续型随机变量及其概率密度的概念,掌握均匀分布$U(a,b)$、正态分布$N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用,其中参数为λ $(\lambda>0)$的指数分布$E(\lambda)$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 若\ x>0, \\ 0\quad , & 若\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

5. 会求随机变量函数的分布.

三、多维随机变量的分布

考试内容

多维随机变量及其分布函数　二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布　二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度　随机变量的独立性和不相关性　常见二维随机变量的分布　两个及两个以上随机变量简单函数的分布

考试要求

1. 理解多维随机变量的分布函数的概念和基本性质.

2. 理解二维离散型随机变量的概率分布和二维连续型随机变量的概率密度,掌握二维随机变量的边缘分布和条件分布.

3. 理解随机变量的独立性和不相关性的概念,掌握随机变量相互独立的条件,理解随机变量的不相关性与独立性的关系.

4. 掌握二维均匀分布和二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,理解其中参数的概率意义.

5. 会根据两个随机变量的联合分布求其函数的分布,会根据多个相互独立随机变量的联合分布求其简单函数的分布.

四、随机变量的数字特征

考试内容

随机变量的数学期望(均值)、方差、标准差及其性质　随机变量函数的数学期望　切比雪夫(Chebyshev)不等式　矩、协方差、相关系数及其性质

考试要求

1. 理解随机变量数字特征(数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数)的概念,会运用数字特征的基本性质,并掌握常用分布的数字特征.

2. 会求随机变量函数的数学期望.

3. 了解切比雪夫不等式.

五、大数定律和中心极限定理

考试内容

切比雪夫大数定律　伯努利（Bernoulli）大数定律　辛钦（Khinchine）大数定律　棣莫弗-拉普拉斯（De Moivre-Laplace）定理　列维-林德伯格（Levy-Lindberg）定理

考试要求

1. 了解切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律（独立同分布随机变量序列的大数定律）.

2. 了解棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理（二项分布以正态分布为极限分布）、列维-林德伯格中心极限定理（独立同分布随机变量序列的中心极限定理），并会用相关定理近似计算有关随机事件的概率.

六、数理统计的基本概念

考试内容

总体　个体　简单随机样本　统计量　经验分布函数　样本均值　样本方差和样本矩　χ^2 分布　t 分布　F 分布　分位数　正态总体的常用抽样分布

考试要求

1. 了解总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩的概念，其中样本方差定义为

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

2. 了解产生 χ^2 变量、t 变量和 F 变量的典型模式；了解标准正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布的上侧 α 分位数，会查相应的数值表.

3. 掌握正态总体的样本均值、样本方差、样本矩的抽样分布.

4. 了解经验分布函数的概念和性质.

七、参数估计

考试内容

点估计的概念　估计量和估计值　矩估计法　最大似然估计法

考试要求

1. 了解参数的点估计、估计量与估计值的概念.
2. 掌握矩估计法(一阶矩、二阶矩)和最大似然估计法.

Ⅵ

题 型 示 例

数 学 (一)

一、选择题:第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合试题要求.

(1) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

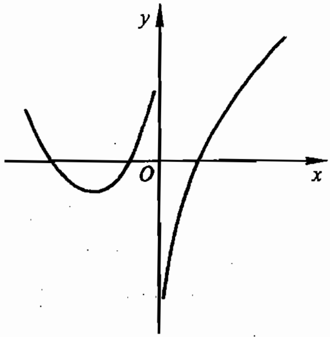
(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如下图所示,则 $f(x)$ 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.



(3) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(4) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x$,则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0.

(5) 设
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$
$$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix},$$
$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$
则必有

(A) $P_1P_2A=B$. (B) $P_2P_1A=B$.

（C）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$.　　　　（D）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.

（6）设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示,则

（A）当 $r<s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关.

（B）当 $r>s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关.

（C）当 $r<s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关.

（D）当 $r>s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关.

（7）将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件

（A）A_1,A_2,A_3相互独立.　　　　（B）A_2,A_3,A_4相互独立.

（C）A_1,A_2,A_3两两独立.　　　　（D）A_2,A_3,A_4两两独立.

（8）设随机变量 $X\sim t(n)\ (n>1)$,$Y=\dfrac{1}{X^2}$,则

（A）$Y\sim\chi^2(n)$.　　　　（B）$Y\sim\chi^2(n-1)$.

（C）$Y\sim F(n,1)$.　　　　（D）$Y\sim F(1,n)$.

二、填空题:第 9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$________.

（10）已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则$y''(0)=$________.

（11）微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为________.

（12）设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为________.

（13）设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A},$$

且 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$，则 $|B|=$ ________.

(14) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$ ________.

三、解答题：第 15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

（Ⅰ）在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

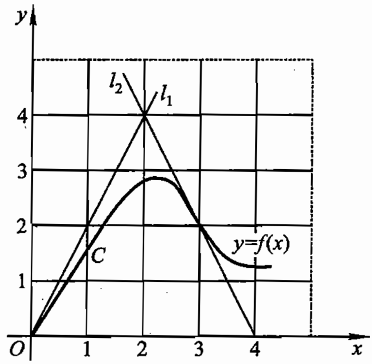
（Ⅱ）在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

(16)（本题满分 10 分）

如右图所示，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,\mathrm{d}x.$$



(17)（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

（Ⅰ）验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；

（Ⅱ）若 $f(1)=0, f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

（18）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

（19）（本题满分 10 分）

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geqslant 0)$ 的上侧.

（20）（本题满分 11 分）

设四元线性齐次方程组①为 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0.\end{cases}$

又已知某线性齐次方程组②的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）求线性方程组①的基础解系；

（Ⅱ）问线性方程组①和②是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解；若没有，则说明理由.

（21）（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

（22）（本题满分 11 分）

已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱

后，求：

（Ⅰ）乙箱中次品件数 X 的数学期望；

（Ⅱ）从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

（23）（本题满分 11 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$. 记 $Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$.

（Ⅰ）求 Y_i 的方差 $DY_i,i=1,2,\cdots,n$；

（Ⅱ）求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；

（Ⅲ）若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c.

数 学（二）

一、选择题：第 1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合试题要求.

（1）设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

（A）$a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　（B）$b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

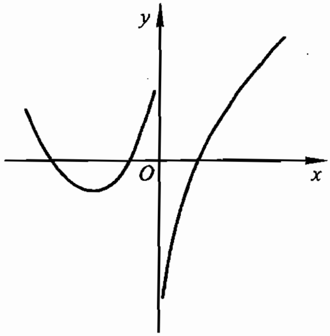
（C）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　（D）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

（2）设当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin(x^n)$ 高阶的无穷小量，而 $x\sin(x^n)$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小量，则正整数 n 等于

（A）1.　　（B）2.

（C）3.　　（D）4.

（3）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如右图所示，则 $f(x)$ 有



（A）一个极小值点和两个极大值点.

（B）两个极小值点和一个极大值点.

（C）两个极小值点和两个极大值点.

（D）三个极小值点和一个极大值点.

（4）设
$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x,$$
$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x,$$
$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x,$$
则有

（A）$N<P<M$.　　（B）$M<P<N$.

（C）$N<M<P$.　　（D）$P<M<N$.

（5）设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，下列选项正确的是

（A）若$f'_x(x_0,y_0)=0$，则$f'_y(x_0,y_0)=0$.

（B）若$f'_x(x_0,y_0)=0$，则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

（C）若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f'_y(x_0,y_0)=0$.

（D）若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

（6）设函数$f(u)$连续，区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，则$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$等于

（A）$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$.

（B）$2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$.

（C）$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}r$.

（D）$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$.

（7）设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，则

(A) 当 $r<s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关.
(B) 当 $r>s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关.
(C) 当 $r<s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关.
(D) 当 $r>s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关.

(8) 设 n $(n\geqslant 3)$阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$,则 a 必为

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{1-n}$. (C) -1. (D) $\dfrac{1}{n-1}$.

二、填空题:第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$________.

(10) 曲线$\begin{cases} x=1+t^2, \\ y=t^3 \end{cases}$在 $t=2$ 处的切线方程为________.

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=$________.

(12) 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为________.

(13) 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

(14) 设三阶方阵 A,B 满足关系式

$$A^{-1}BA=6A+BA,$$

且 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$,则 $|B|=$________.

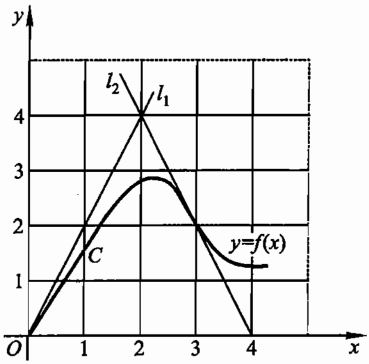
三、解答题:第 15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$$
问 a 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续? a 为何值时,$x=0$ 是$f(x)$的可去间断点?

(16)(本题满分 10 分)

如下图所示,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点$(3,2)$是它的一个拐点,直线 l_1与 l_2分别是曲线 C 在点$(0,0)$与$(3,2)$处的切线,其交点为$(2,4)$. 设函数 $f(x)$具有三阶连续导数,计算定积分
$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,dx.$$



(17)(本题满分 10 分)

设 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,其中 $\varphi(u,v)$有二阶偏导数.

(18)(本题满分 10 分)

计算 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy\int_0^{y} e^{-x^2}dx+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2}dx$.

(19)(本题满分 10 分)

设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$,其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q,且线段 PQ 被 x 轴平分.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$ 的方程;

(Ⅱ)已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l,试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

(20)(本题满分 11 分)

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数,并且 $g''(x)\neq0$,$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$,试证:

(Ⅰ)在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq0$;

(Ⅱ)在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

(21)(本题满分 11 分)

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解,求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

(22)(本题满分 11 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ ax_1+bx_2+cx_3=0,\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0.\end{cases}$$

(Ⅰ)a,b,c 满足何种关系时,方程组仅有零解?

(Ⅱ)a,b,c 满足何种关系时,方程组有无穷多个解?并用基础解系表示全部解.

(23)(本题满分 11 分)

若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$相似于对角矩阵$\Lambda$,试确定常数$a$的值,并求可逆矩阵$P$,使$P^{-1}AP=\Lambda$.

数 学 (三)

一、选择题:第1~8小题,每小题4分,共32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合试题要求.

(1) 设$f(x)$的导数在$x=a$处连续,又$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,则

(A) $x=a$是$f(x)$的极小值点.

(B) $x=a$是$f(x)$的极大值点.

(C) $(a,f(a))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $x=a$不是$f(x)$的极值点,$(a,f(a))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(2) 设$g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2+1), & 若\ 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{3}(x-1), & 若\ 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

则$g(x)$在区间$(0,2)$内

(A) 无界. (B) 递减. (C) 不连续. (D) 连续.

(3) 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数$\varphi$具有二阶导数,$\psi$具有一阶导数,则必有

(A) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$. (B) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$. (D) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$.

(4) 累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$可以写成

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(5) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则必有

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. (B) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$. (D) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.

(6) 设有任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$，使 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$，则

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$

(A) 单调增大. (B) 单调减小.

(C) 保持不变. (D) 非单调变化.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

二、填空题:第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设 $\int xf(x)\,\mathrm{d}x=\arcsin x+C$,则 $\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$________.

(10) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

(11) 函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定,其中函数 $g(y)$ 可微,且 $g(y)\neq 0$,则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$________.

(12) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$ 的收敛域是________.

(13) 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq a_j$ $(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots,n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 的解是________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 $(2,p)$ 的二项分布，随机变量 Y 服从参数为 $(3,p)$ 的二项分布. 若 $P\{X \geqslant 1\} = \dfrac{5}{9}$，则 $P\{Y \geqslant 1\}$ =________.

三、解答题：第 15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

设
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$$
其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

（Ⅰ）求 $f'(x)$；

（Ⅱ）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性.

(16)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

(17)（本题满分 10 分）

设 $a>1, f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时，$t(a)$ 最小？并求出最小值.

(18)（本题满分 10 分）

设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：

$$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x)，且\ f(0)=0, f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x.$$

（Ⅰ）求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

（Ⅱ）求出 $F(x)$ 的表达式.

(19)（本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可导,且$f(0)+f(1)+f(2)=3$,$f(3)=1$. 试证必存在$\xi\in(0,3)$,使$f'(\xi)=0$.

(20)(本题满分 11 分)

设四元线性齐次方程组①为$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0.\end{cases}$

又已知某线性齐次方程组②的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

(Ⅰ)求线性方程组①的基础解系;

(Ⅱ)问线性方程组①和②是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解;若没有,则说明理由.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$,其中二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值之和为 1,特征值之积为-12.

(Ⅰ)求a,b的值;

(Ⅱ)利用正交变换将二次型f化为标准形,并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

假设随机变量X的绝对值不大于 1;$P\{X=-1\}=\dfrac{1}{8}$,$P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$;在事件$\{-1<X<1\}$出现的条件下,X在$(-1,1)$内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比. 试求:

(Ⅰ)X的分布函数$F(x)=P\{X\leqslant x\}$;

(Ⅱ)X取负值的概率p.

(23)(本题满分 11 分)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>2)$为来自总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本,其样本均值为$\overline{X}$. 记$Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$.

(Ⅰ)求Y_i的方差$DY_i,i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ)求Y_1与Y_n的协方差$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$;

(Ⅲ)若$c(Y_1+Y_n)^2$是σ^2的无偏估计量,求常数c.

参考答案

数学(一)

一、选择题

(1) D (2) C (3) D (4) B (5) A (6) D
(7) C (8) C

二、填空题

(9) $\frac{1}{3}$ (10) -2 (11) $y=-2x+C_1\cos x+C_2\sin x$

(12) $\frac{3}{2}\pi$ (13) 6 (14) 18.4

三、解答题

(15) **证** (Ⅰ) 用反证法. 若存在点 $c\in(a,b)$, 使 $g(c)=0$, 则对 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可分别应用罗尔定理, 知存在 $\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$, 使

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0.$$

再对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理, 知存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$, 使 $g''(\xi_3)=0$. 这与题设 $g''(x)\neq0$ 矛盾, 故在 (a,b) 内 $g(x)\neq0$.

(Ⅱ) 令 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$.

易知 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 对 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理, 知存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$, 即 $f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$. 因 $g(\xi)\neq0$, $g''(\xi)\neq0$, 故得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

(16) **解** $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\,dx$

$$=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-[7\times(-2)-2]+2\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=16+2f(x)\Big|_0^3$$

$$=16+4$$

$$=20.$$

(17) **解** （Ⅰ）由 $z=f(u)$，$u=\sqrt{x^2+y^2}$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

所以根据题设条件可得 $f''+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot f'=0$，即

$$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）及 $f'(1)=1$，得 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$，所以 $f(u)=\ln u+C$.

由 $f(1)=0$，得 $C=0$，因此 $f(u)=\ln u$.

(18) **解** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)}\cdot\dfrac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1}=1$，所以当 $x^2<1$ 时，原级数绝对收敛；当 $x^2>1$ 时，原级数发散. 因此原级数的收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$.

记 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n},x\in(-1,1),$$

则 $$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},x\in(-1,1),$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

由于 $$S(0)=0,S'(0)=0,$$

所以 $$S'(x)=\int_0^x S''(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x,$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x \arctan t\,dt=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

又 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2},x\in(-1,1),$$

从而 $$f(x)=2S(x)+\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

(19) **解** 取 Σ_1 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy-$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy.$$

由高斯公式知

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\,dxdydz$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)r\,dz$$

$$=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)\right]dr$$

$$=2\pi,$$

而
$$\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi,$$

因此 $I=2\pi-3\pi=-\pi.$

(20) **解** (Ⅰ) 由已知,①的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

故①的基础解系可取为$(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ) 有非零公共解.

将②的通解代入方程组①,则有

$$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0,\\ k_1+2k_2-k_2=0,\end{cases}$$

解得
$$k_1=-k_2.$$

当 $k_1=-k_2\neq 0$ 时,向量

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$$
$$=k_2[(0,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}]$$
$$=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

满足方程组①(显然也是②的解),故方程组①,②有非零公共解,所有非零公共解是

$$k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\quad (k\text{ 是不为 0 的任意常数}).$$

(21) **解法 1** 经计算可得

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$B=P^{-1}A^{*}P=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix},$$

从而

$$B+2E=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix},$$

$$|\lambda E-(B+2E)|=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&0\\2&\lambda-7&4\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-9)^2(\lambda-3),$$

故 $B+2E$ 的特征值为 9,9,3.

当 $\lambda_1=\lambda_2=9$ 时,对应的线性无关特征向量可取为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2是不全为零的任意常数.

当 $\lambda_3=3$ 时,对应的一个特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3\boldsymbol{\eta}_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_3是不为零的任意常数.

解法 2　设 A 的特征值为 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}$,即 $A\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$. 由

于 $|A|=7\neq 0$,所以 $\lambda\neq 0$.

又因 $A^*A=|A|E$,故有 $A^*\eta=\frac{|A|}{\lambda}\eta$,于是有

$$B(P^{-1}\eta)=P^{-1}A^*P(P^{-1}\eta)=\frac{|A|}{\lambda}(P^{-1}\eta),$$

$$(B+2E)P^{-1}\eta=\left(\frac{|A|}{\lambda}+2\right)P^{-1}\eta,$$

因此,$\frac{|A|}{\lambda}+2$ 为 $B+2E$ 的特征值,对应的特征向量为 $P^{-1}\eta$.

由于 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,对应的线性无关特征向量可取为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=7$ 时,对应的一个特征向量为

$$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

由 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,得

$$P^{-1}\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},P^{-1}\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},P^{-1}\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

因此 $B+2E$ 的三个特征值分别为 9,9,3.

对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1P^{-1}\eta_1+k_2P^{-1}\eta_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2是不全为零的任意常数.

对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_3是不为零的任意常数.

(22) **解法 1** (Ⅰ) X 的可能取值为 0,1,2,3,X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3},\quad k=0,1,2,3,$$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此

$$EX=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}.$$

(Ⅱ) 设 A 表示事件"从乙箱中任意取出的一件产品是次品",根据全概率公式,有

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A\mid X=k\}\\&=\frac{1}{20}\times0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

解法 2 (Ⅰ) 设

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{从甲箱中取出的第 } i \text{ 件产品是合格品},\\1, & \text{从甲箱中取出的第 } i \text{ 件产品是次品},\end{cases}$$

则 X_i的概率分布为

X_i	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, $i=1,2,3$,

且 $EX_i=\frac{1}{2}$ $(i=1,2,3)$.

因为 $X=X_1+X_2+X_3$,所以

$$EX=E(X_1+X_2+X_3)=EX_1+EX_2+EX_3=\frac{3}{2}.$$

(Ⅱ) 设 A 表示事件"从乙箱中任意取出的一件产品是次品",由于 $\{X=0\}$,$\{X=1\}$,$\{X=2\}$ 和 $\{X=3\}$ 构成完全事件组,因此根据全概率公式,有

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A\mid X=k\}\\&=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}kP\{X=k\}\\&=\frac{1}{6}EX=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(23) **解** (Ⅰ) $DY_i=D(X_i-\bar{X})$

$$\begin{aligned}&=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}X_k\right]\\&=\frac{n-1}{n}\sigma^2,i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]$

$$\begin{aligned}&=E[(X_1-\bar{X})(X_n-\bar{X})]\\&=E(X_1X_n)+E(\bar{X}^2)-E(X_1\bar{X})-E(X_n\bar{X})\\&=EX_1EX_n+D\bar{X}-\frac{1}{n}E(X_1^2)-\\&\quad\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}E(X_1X_i)-\\&\quad\frac{1}{n}E(X_n^2)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_iX_n)\\&=-\frac{1}{n}\sigma^2.\end{aligned}$$

(Ⅲ) $E[c(Y_1+Y_n)^2]=cD(Y_1+Y_n)$

$$
\begin{aligned}
&= c[DY_1+DY_n+2\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)]\\
&= c\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n}-\frac{2}{n}\right)\sigma^2\\
&= \frac{2(n-2)}{n}c\sigma^2\\
&= \sigma^2,
\end{aligned}
$$

故
$$c=\frac{n}{2(n-2)}.$$

数 学（二）

一、选择题

(1) D (2) B (3) C (4) D (5) D (6) D
(7) D (8) B

二、填空题

(9) $\frac{1}{3}$ (10) $3x-y-7=0$ 或 $y-8=3(x-5)$ (11) $\frac{\pi}{8}$

(12) $y=-2x+C_1\cos x+C_2\sin x$ (13) 1 (14) 6

三、解答题

(15) **解**
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\lim_{x\to 0^-}\sqrt{1-x^2}\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{6ax}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=-6a,
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2\lim_{x\to0^+}(a^2e^{ax}+2)=2a^2+4.$$

令 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，有 $-6a=2a^2+4$，得 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$，因而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

（16）解

$$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\,dx$$

$$=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\,dx$$

$$=-\int_0^3(2x+1)f''(x)\,dx$$

$$=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3f'(x)\,dx$$

$$=-[7\times(-2)-2]+2\int_0^3f'(x)\,dx$$

$$=16+2f(x)\Big|_0^3$$

$$=16+4$$

$$=20.$$

（17）解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+\varphi'_1+\dfrac{1}{y}\varphi'_2$，

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi''_{12}\left(-\frac{x}{y^2}\right)-\frac{1}{y^2}\varphi'_2+\frac{1}{y}\varphi''_{22}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi'_2-\frac{x}{y^2}\varphi''_{12}-\frac{x}{y^3}\varphi''_{22}.$$

（18）解 积分区域

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{R}{\sqrt2},x\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant R,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

所以
$$\text{原式} = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R re^{-r^2} dr$$
$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2}(1-e^{-R^2}) = \frac{\pi}{8}(1-e^{-R^2}).$$

(19) **解** (Ⅰ) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为
$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$
其中 (X,Y) 为法线上任意一点的坐标. 令 $X=0$, 则
$$Y=y+\frac{x}{y'},$$
故 Q 点坐标为 $\left(0,y+\frac{x}{y'}\right)$. 由题设知
$$y+y+\frac{x}{y'}=0, \text{即 } 2ydy+xdx=0,$$
积分得
$$x^2+2y^2=C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

由 $y\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$ 知 $C=1$, 故曲线 $y=f(x)$ 的方程为
$$x^2+2y^2=1.$$

(Ⅱ) 曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为
$$l=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为
$$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \end{cases}$$
故
$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2\theta}\,d\theta.$$

令 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-t$,则

$$s=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos^2 t}\,(-\mathrm{d}t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{l}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}l.$$

(20) **证** (Ⅰ)用反证法.若存在点 $c\in(a,b)$,使 $g(c)=0$,则对 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可分别应用罗尔定理,知存在 $\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$ 使

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0.$$

再对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理,知存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$,使 $g''(\xi_3)=0$. 这与题设 $g''(x)\neq 0$ 矛盾,故在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

(Ⅱ)令 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$.

易知 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,对 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理,知存在 $\xi\in(a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,即 $f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$. 因 $g(\xi)\neq 0$, $g''(\xi)\neq 0$,故得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

(21) **解** 将 $y=\mathrm{e}^x$ 代入原方程,得

$$x\mathrm{e}^x+p(x)\mathrm{e}^x=x,$$

解出 $$p(x)=x\mathrm{e}^{-x}-x,$$

代入原方程,得 $$xy'+(x\mathrm{e}^{-x}-x)y=x.$$

解其对应的齐次方程 $y'+(\mathrm{e}^{-x}-1)y=0$,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=(-\mathrm{e}^{-x}+1)\mathrm{d}x,$$

$$\ln y-\ln C=\mathrm{e}^{-x}+x,$$

得齐次方程的通解 $$y=C\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}},$$

所以,原方程的通解为 $$y=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

由 $y\Big|_{x=\ln 2}=0$,得 $$2+2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}C=0,$$

即
$$C=-e^{-\frac{1}{2}},$$
故所求特解为
$$y=e^{x}-e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}.$$

（22）**解**　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a).$$

（Ⅰ）当 $a\neq b,b\neq c,c\neq a$ 时，$D\neq 0$，方程组仅有零解

$$x_1=x_2=x_3=0.$$

（Ⅱ）下面分四种情况：

（i）当 $a=b\neq c$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ \qquad\qquad x_3=0,\end{cases}$$

方程组有无穷多个解，全部解为

$$k_1(1,-1,0)^{\mathrm{T}}\quad(k_1\text{为任意常数}).$$

（ii）当 $a=c\neq b$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ \qquad x_2\qquad\ =0,\end{cases}$$

方程组有无穷多个解，全部解为

$$k_2(1,0,-1)^{\mathrm{T}}\quad(k_2\text{为任意常数}).$$

（iii）当 $b=c\neq a$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1\qquad\qquad=0,\end{cases}$$

方程组有无穷多个解，全部解为

$$k_3(0,1,-1)^{\mathrm{T}}\quad(k_3\text{为任意常数}).$$

（iv）当 $a=b=c$ 时，同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

方程组有无穷多个解，全部解为

$$k_4(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_5(-1,0,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_4,k_5\text{为任意常数}).$$

（23）**解**　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]$$
$$=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2.$

由于 A 相似于对角矩阵 Λ,故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有两个线性无关的特征向量,因此矩阵 $6E-A$ 的秩应为 1,从而有

$$6E-A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

知 $a=0.$

于是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-2$ 时,

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 0\\ -8 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

解方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2=0,\\ x_3\quad\ =0,\end{cases}$ 得对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

令 $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,则 P 可逆,并有 $P^{-1}AP=\Lambda.$

数学(三)

一、选择题

(1) B (2) D (3) B (4) D (5) A (6) D
(7) C (8) B

二、填空题

(9) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$ (10) $C_1e^{3x}+C_2e^x-2e^{2x}$ (11) $-\frac{g'(v)}{[g(v)]^2}$

(12) $[-1,1]$ (13) $\boldsymbol{X}=(1,0,\cdots,0)^T$ (14) $\frac{19}{27}$

三、解答题

(15) 解 (Ⅰ) 当 $x\neq0$ 时,有

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}$$

$$=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2};$$

当 $x=0$ 时,由导数定义,有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{g''(0)-1}{2},$$

所以

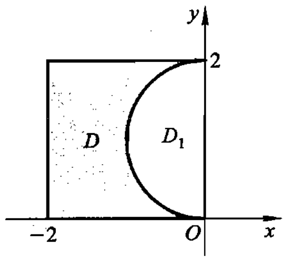
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}, & 若\ x\neq 0,\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & 若\ x=0.\end{cases}$$

（Ⅱ）因为在 $x=0$ 处，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f'(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+\mathrm{e}^{-x}-(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2}\\&=\frac{g''(0)-1}{2}\\&=f'(0),\end{aligned}$$

而 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处是连续函数，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为连续函数.

(16) **解法 1**　区域 D 和 D_1 如右图所示，有



$$\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{2}y\mathrm{d}y=4.$$

在极坐标系下，有

$$D_1=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\right\},$$

因此
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\sin\theta}r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{8}{3\times 4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

于是

$$\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4-\frac{\pi}{2}.$$

解法 2　如上图所示，$D=\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2y-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\}$，故

有

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 y\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y.$$

令 $y-1=\sin t$,有 $\mathrm{d}y=\cos t\mathrm{d}t$,则

$$\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2},$$

于是

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4-\frac{\pi}{2}.$$

(17) **解** 由 $f'(t)=a^t\ln a-a=0$,得唯一驻点

$$t(a)=1-\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}.$$

考察函数 $t(a)=1-\dfrac{\ln(\ln a)}{\ln a}$在 $a>1$ 时的最小值. 令

$$t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln(\ln a)}{(\ln a)^2}=-\frac{1-\ln(\ln a)}{a(\ln a)^2}=0,$$

得唯一驻点

$$a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}.$$

当 $a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时,$t'(a)>0$;当 $a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时,$t'(a)<0$. 因此

$$t(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

为极小值，从而是最小值.

(18) **解** (Ⅰ) 由

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$=g^2(x)+f^2(x)$$
$$=[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)$$
$$=(2e^x)^2-2F(x),$$

可见 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程为

$$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}.$$

(Ⅱ) 由一阶微分方程的求解公式，有

$$F(x)=e^{-\int 2dx}\left(\int 4e^{2x}\cdot e^{\int 2dx}dx+C\right)$$
$$=e^{-2x}\left(\int 4e^{4x}dx+C\right)$$
$$=e^{2x}+Ce^{-2x}.$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得

$$C=-1,$$

于是

$$F(x)=e^{2x}-e^{-2x}.$$

(19) **证** 因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,$$
$$m\leqslant f(1)\leqslant M,$$
$$m\leqslant f(2)\leqslant M,$$

故

$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

由介值定理知，至少存在一点 $c\in[0,2]$，使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1.$$

因为 $f(c)=1=f(3)$，且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，所以由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

(20) **解** (Ⅰ) 由已知,①的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

故①的基础解系可取为$(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ) 有非零公共解.

将②的通解代入方程组①,则有

$$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0,\\ k_1+2k_2-k_2=0,\end{cases}$$

解得 $$k_1=-k_2.$$

当 $k_1=-k_2\neq 0$ 时,向量

$$\begin{aligned}&k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}\\=&k_2[(0,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}]\\=&k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

满足方程组①(显然也是②的解),故方程组①,②有非零公共解,所有非零公共解是

$$k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k\text{ 是不为 0 的任意常数}).$$

(21) **解法 1** (Ⅰ) 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\0 & 2 & 0\\b & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_i $(i=1,2,3)$. 由题设,有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}a & 0 & b\\0 & 2 & 0\\b & 0 & -2\end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12,$$

解得 $a=1,b=2$.

(Ⅱ) 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\0 & \lambda-2 & 0\\-2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$,解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得其基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_3=-3$,解齐次线性方程组 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}.$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 已是正交向量组,为得到规范正交向量组,只需将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化,由此得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下,有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix},$$

且二次型的标准形为

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$

解法 2 (Ⅰ)二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -b\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -b & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)[\lambda^2-(a-2)\lambda-(2a+b^2)].$$

设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则

$$\lambda_1=2,\lambda_2+\lambda_3=a-2,\lambda_2\lambda_3=-(2a+b^2).$$

由题设得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+(a-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2(2a+b^2)=-12,$$

解得 $a=1,b=2$.

(Ⅱ)由(Ⅰ),可得 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3.$$

以下可参见解法 1.

(22)**解** (Ⅰ)由条件可知,当 $x<-1$ 时,有

$$F(x)=0;F(-1)=\frac{1}{8};$$

$$P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

易见,在 X 的值属于 $(-1,1)$ 的条件下,事件 $\{-1<X\leqslant x\}$ $(-1<x<1)$ 的条件概率为

$$P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}=\frac{x+1}{2}.$$

于是,对于 $-1<x<1$,有

$$\begin{aligned}P\{-1<X\leqslant x\}&=P\{-1<X\leqslant x,-1<X<1\}\\&=P\{-1<X<1\}\cdot P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}\\&=\frac{5}{8}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}\\&=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16};\end{aligned}$$

对于 $x\geqslant 1$,有 $F(x)=1$. 从而

$$F(x)=\begin{cases}0, & 若\ x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & 若-1\leqslant x<1,\\ 1, & 若\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

（Ⅱ）X 取负值的概率

$$p=P\{X<0\}=F(0)-P\{X=0\}=F(0)=\frac{7}{16}.$$

（23）**解** （Ⅰ）$DY_i=D(X_i-\overline{X})$

$$=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}X_k\right]$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2,i=1,2,\cdots,n.$$

（Ⅱ）$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]$

$$=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]$$

$$=E(X_1X_n)+E(\overline{X}^2)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})$$

$$=EX_1EX_n+D\overline{X}-\frac{1}{n}E(X_1^2)-\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}E(X_1X_i)-$$

$$\frac{1}{n}E(X_n^2)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_iX_n)$$

$$=-\frac{1}{n}\sigma^2.$$

（Ⅲ）$E[c(Y_1+Y_n)^2]=cD(Y_1+Y_n)$

$$=c[DY_1+DY_n+2\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)]$$

$$=c\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n}-\frac{2}{n}\right)\sigma^2$$

$$=\frac{2(n-2)}{n}c\sigma^2=\sigma^2,$$

故

$$c=\frac{n}{2(n-2)}.$$

附　　录

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及参考答案

数学(一)试题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) (1,0). (B) (2,0).

(C) (3,0). (D) (4,0).

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\ (n=1,2,\cdots)$ 无界,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为

(A) (-1,1]. (B) [-1,1).

(C) [0,2). (D) (0,2].

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(x)>0, f'(0)=0$,则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点(0,0)处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f(0)>1, f''(0)>0$. (B) $f(0)>1, f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1, f''(0)>0$. (D) $f(0)<1, f''(0)<0$.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 EX 与 EY 存在,记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$,则 $E(UV)=$

(A) $EU\cdot EV$.　　(B) $EX\cdot EY$.

(C) $EU\cdot EY$.　　(D) $EX\cdot EV$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\ \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________.

(10) 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则 $\left.\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z =$ ________.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$ ________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16)（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)（本题满分 10 分）

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

(18)（本题满分 10 分）

（Ⅰ）证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立.

（Ⅱ）设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n \quad (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19)（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知,$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(Ⅰ)求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(Ⅱ)计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$.

数学(一)试题参考答案

一、选择题

(1) C　(2) C　(3) A　(4) B　(5) D　(6) D　(7) D　(8) B

二、填空题

(9) $\ln(1+\sqrt{2})$　(10) $e^{-x}\sin x$　(11) 4　(12) π　(13) 1
(14) $\mu\sigma^2+\mu^3$

三、解答题

(15) 解　记 $y=\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$. 当 $x>0$ 时, $\ln y=\dfrac{\ln[\ln(1+x)]-\ln x}{e^x-1}$,

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln[\ln(1+x)]-\ln x}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{(1+x)\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

当 $x<0$ 时, $\ln y=\dfrac{\ln[-\ln(1+x)]-\ln(-x)}{e^x-1}$,同样可得

$$\lim_{x\to0^-}\ln y=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln[-\ln(1+x)]-\ln(-x)}{e^x-1}=-\frac{1}{2}.$$

综上可知, $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

(16) **解** 由题意 $g'(1)=0$.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+yg'(x)f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y[xf''_{11}+g(x)f''_{12}]+g'(x)f'_2+yg'(x)[xf''_{21}+g(x)f''_{22}],$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1).$$

(17) **解** 令 $f(x)=k\arctan x-x$,则 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数,且

$$f(0)=0,\ f'(x)=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

当 $k-1\leqslant 0$ 即 $k\leqslant 1$ 时,$f'(x)<0\ (x\neq 0)$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少,方程 $f(x)=0$ 只有一个实根 $x=0$.

当 $k-1>0$ 即 $k>1$ 时,在区间 $(0,\sqrt{k-1})$ 内 $f'(x)>0$,$f(x)$ 单调增加;在区间 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减少,所以 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值.

由于 $f(0)=0$,所以 $f(\sqrt{k-1})>0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{k\arctan x}{x}-1\right)=-\infty$,所以存在 $\xi\in(\sqrt{k-1},+\infty)$,使得 $f(\xi)=0$.

由 $f(x)$ 是奇函数及其单调性可知:当 $k>1$ 时,方程 $f(x)=0$ 有且仅有 3 个不同实根 $x=-\xi,\ x=0,\ x=\xi$.

(18) **证** (Ⅰ) 根据拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(n,n+1)$,使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi},$$

所以

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}.$$

(Ⅱ) 当 $n\geqslant 1$ 时,由(Ⅰ)知

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

且

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln(1+n)-\ln n>0,\end{aligned}$$

所以数列$\{a_n\}$单调减少且有下界，故$\{a_n\}$收敛.

（19）**解**　因为$f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，所以

$$f'_y(1,y)=0,\ f'_x(x,1)=0,$$

从而

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\ \mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=a.\end{aligned}$$

（20）**解**　（Ⅰ）4个3维向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$线性相关$(i=1,2,3)$，若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_i$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示$(i=1,2,3)$，与题设矛盾，于是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关，从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0,$$

于是$a=5$. 此时，$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示.

（Ⅱ）令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \vdots\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 对$\boldsymbol{A}$施以初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

从而

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(21) **解** (Ⅰ) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,故 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由题设可得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以-1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且属于-1 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,$k_1$ 为任意非零常数;1 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且属于 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$k_2$ 为任意非零常数.

设 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 0 的特征向量,由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,则

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad (1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即

$$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}$$

于是属于 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$k_3$ 为任意非零常数.

(Ⅱ) 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

于是

$$A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(22) **解** (Ⅰ) 由 $P\{X^2=Y^2\}=1$ 得 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$,所以

$$P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0,$$

故(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(Ⅱ) $Z=XY$ 的可能取值为 $-1,0,1$. 由(X,Y)的概率分布可得 Z 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅲ) 由 X,Y 及 Z 的概率分布得

$$EX=\frac{2}{3},\ DX=\frac{2}{9},$$

$$EY=0\ ,\ DY=\frac{2}{3},$$

$$EZ=E(XY)=0,$$

所以 $$\operatorname{Cov}(X,Y)=0,\rho_{XY}=0.$$

(23)(Ⅰ)**解** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值,则似然函数

$$L(\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2},$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2.$$

令$\dfrac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=0$,得

$$-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0,$$

从而得 σ^2 的最大似然估计

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2.$$

(Ⅱ)**解法 1** 由于 $\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$,

所以 $$E\hat{\sigma}^2=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2,D\hat{\sigma}^2=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

解法 2 $$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu_0)^2=\sigma^2,$$

$$D\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i-\mu_0)^2=\frac{1}{n}D(X_1-\mu_0)^2$$

$$=\frac{\sigma^4}{n}D\left(\frac{X_1-\mu_0}{\sigma}\right)^2=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

数学(二)试题

一、选择题:1~8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 已知当$x\to 0$时,函数$f(x)=3\sin x-\sin 3x$与cx^k是等价无穷小量,则

(A) $k=1,c=4$.　　(B) $k=1,c=-4$.

(C) $k=3,c=4$.　　(D) $k=3,c=-4$.

(2) 设函数$f(x)$在$x=0$处可导,且$f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.　　(D) 0.

(3) 函数$f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$的驻点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(4) 微分方程$y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}$ $(\lambda>0)$的特解形式为

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.　　(B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.　　(D) $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

(5) 设函数$f(x)$,$g(x)$均有二阶连续导数,满足$f(0)>0$,$g(0)<0$,且$f'(0)=g'(0)=0$,则函数$z=f(x)g(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f''(0)<0$, $g''(0)>0$.　　(B) $f''(0)<0$, $g''(0)<0$.

(C) $f''(0)>0$, $g''(0)>0$.　　(D) $f''(0)>0$, $g''(0)<0$.

(6) 设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\,dx$,$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\,dx$,$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\,dx$,则$I,J,K$的大小关系为

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

(10) 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 曲线 $y=\int_0^x\tan t\,\mathrm{d}t\ \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________.

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0,\end{cases}$ $\lambda>0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=$________.

(13) 设平面区域 D 由直线 $y=x$,圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成,则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$________.

(14) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,则 f 的正惯性指数为________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^\alpha}$. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$,试求 α 的取值范围.

(16)(本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 确定,求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(17)(本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导,且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数,且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点. 记 α 为曲线 l 在点(x,y)处切线的倾角,若 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,求 $y(x)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

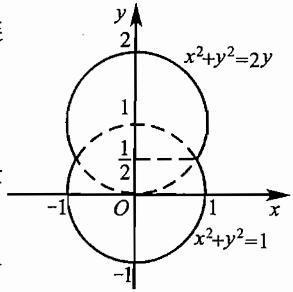
(Ⅰ)证明:对任意的正整数 n,都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ)设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\quad(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(20)(本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线

由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.



（Ⅰ）求容器的容积；

（Ⅱ）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为 g m/s^2，水的密度为10^3 kg/m^3）

（21）（本题满分 11 分）

已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0,f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=a$，其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,dxdy$.

（22）（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm T}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm T}$ 线性表示.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（23）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

数学(二)试题参考答案

一、选择题

(1) C (2) B (3) C (4) C (5) A (6) B (7) D (8) D

二、填空题

(9) $\sqrt{2}$ (10) $e^{-x}\sin x$ (11) $\ln(1+\sqrt{2})$ (12) $\frac{1}{\lambda}$ (13) $\frac{7}{12}$

(14) 2

三、解答题

(15) **解** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}}=\frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

由题意 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$,得 $\alpha>1$.

又因为

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}{x^\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0^+} x^{3-\alpha},$$

由题意$\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0$,得 $\alpha<3$.

综上所述， $1<\alpha<3$.

(16) **解** 令$\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=0$,得 $t=\pm1$.

当 $t=1$ 时,$x=\frac{5}{3}$;当 $t=-1$ 时,$x=-1$.

令$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}=0$,得 $t=0$,即 $x=\frac{1}{3}$.

列表如下：

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+

由此可知,函数 $y(x)$ 的极大值为 $y(-1)=y\big|_{t=-1}=1$,极小值为 $y\left(\frac{5}{3}\right)=y\big|_{t=1}=-\frac{1}{3}$.

曲线 $y=y(x)$ 的凹区间为$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$,凸区间为$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$.

由于 $y\left(\frac{1}{3}\right)=y\big|_{t=0}=\frac{1}{3}$,所以曲线 $y=y(x)$ 的拐点为$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(17) **解** 由题意 $g'(1)=0$.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f_1'+y[xf_{11}''+g(x)f_{12}'']+g'(x)f_2'+yg'(x)[xf_{21}''+g(x)f_{22}''],$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

(18) **解** 由于 $y'=\tan\alpha$，即 $\alpha=\arctan y'$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+y'^2},$$

于是有$\frac{y''}{1+y'^2}=y'$，即

$$y''=y'(1+y'^2). \qquad ①$$

令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入①式得

$$p'=p(1+p^2),$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p(1+p^2)}=\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\ln\frac{p^2}{1+p^2}=2x+\ln C_1. \qquad ②$$

由题意 $y'(0)=1$，即当 $x=0$ 时 $p=1$，代入②式得 $C_1=\frac{1}{2}$，于是有

$$y'=p=\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}},$$

两边积分得

$$y=\int\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}+C_2,$$

由 $y(0)=0$ 得 $C_2=-\frac{\pi}{4}$，所以

$$y=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

(19) **证** (Ⅰ) 根据拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(n,n+1)$,使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi},$$

所以
$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}.$$

(Ⅱ) 当 $n\geqslant1$ 时,由(Ⅰ)知

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

且

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln(1+n)-\ln n>0,\end{aligned}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界,故 $\{a_n\}$ 收敛.

(20) **解** (Ⅰ) 由对称性,所求的容积为

$$V=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}y=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{9\pi}{4},$$

即该容器的容积为 $\frac{9\pi}{4}$ m^3.

(Ⅱ) 所求的功为

$$\begin{aligned}W&=10^3\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)(2-y)g\mathrm{d}y+10^3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi[1-(y-1)^2](2-y)g\mathrm{d}y\\&=10^3\pi g\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y-2y^2+y^3)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4y-4y^2+y^3)\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{27\times10^3}{8}\pi g,\end{aligned}$$

即所求的功为$\frac{27\times10^3}{8}\pi g$ J.

(21) **解** 因为$f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$,所以

$$f'_y(1,y)=0,\ f'_x(x,1)=0,$$

从而

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= a.
\end{aligned}$$

(22) **解** (Ⅰ) 4 个 3 维向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$线性相关$(i=1,2,3)$,若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关,则$\boldsymbol{\alpha}_i$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示$(i=1,2,3)$,与题设矛盾,于是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关,从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0,$$

于是 $a=5$. 此时$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示.

(Ⅱ) 令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 对$\boldsymbol{A}$施以初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

从而

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(23) **解** (Ⅰ) 由于$\boldsymbol{A}$的秩为 2,故 0 是$\boldsymbol{A}$的一个特征值. 由题

设可得

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以-1是A的一个特征值,且属于-1的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,$k_1$为任意非零常数;1也是$A$的一个特征值,且属于1的特征向量为$k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$k_2$为任意非零常数.

设$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$是$A$的属于0的特征向量,由于$A$为实对称矩阵,则

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad (1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即

$$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}$$

于是属于0的特征向量为$k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$k_3$为任意非零常数.

(Ⅱ)令$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$,则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

数学(三)试题

一、选择题:1~8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 已知当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量,则

(A) $k=1,c=4$.　　(B) $k=1,c=-4$.

(C) $k=3,c=4$.　　(D) $k=3,c=-4$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.　　(D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列,则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$, $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$, 则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解,k_1,k_2 为任意常数,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 λ $(\lambda>0)$ 的泊松分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant2)$ 为来自该总体的简单随机样本,则对于统计量 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$,有

(A) $ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$.　　　　(B) $ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$.

(C) $ET_1<ET_2,DT_1>DT_2$.　　　　(D) $ET_1<ET_2,DT_1<DT_2$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$,则$f'(x)=$________.

(10) 设函数$z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$,则$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$________.

(11) 曲线$\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{y}$在点$(0,0)$处的切线方程为________.

(12) 曲线$y=\sqrt{x^2-1}$,直线$x=2$及x轴所围的平面图形绕x轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(13) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的秩为1,$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为3,则$f$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则$E(XY^2)=$________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数,$f(1,1)=2$是$f(u,v)$的极值,$z=f(x+y,f(x,y))$. 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$.

(17)(本题满分 10 分)

求不定积分$\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 10 分)

证明方程$4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$恰有两个实根.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=1$,且满足

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_t} f(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x,0\leqslant x\leqslant t\}\quad(0<t\leqslant 1)$,

求 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是由 $x-$

$y=0, x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

（Ⅰ）求 X 的概率密度 $f_X(x)$；

（Ⅱ）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

数学(三)试题参考答案

一、选择题

(1) C (2) B (3) A (4) B (5) D (6) C (7) D (8) D

二、填空题

(9) $(1+3x)e^{3x}$ (10) $(1+2\ln 2)(dx-dy)$ (11) $y=-2x$

(12) $\dfrac{4\pi}{3}$ (13) $3y_1^2$ (14) $\mu\sigma^2+\mu^3$

三、解答题

(15) 解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}.$$

(16) 解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1(x+y,f(x,y))+f'_2(x+y,f(x,y))\cdot f'_1(x,y)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}(x+y,f(x,y))+f''_{12}(x+y,f(x,y))\cdot f'_2(x,y)+f''_{12}(x,y)\cdot$$
$$f'_2(x+y,f(x,y))+f'_1(x,y)[f''_{21}(x+y,f(x,y))+$$
$$f''_{22}(x+y,f(x,y))\cdot f'_2(x,y)].$$

由题意知 $\qquad f'_1(1,1)=0, f'_2(1,1)=0,$

从而 $$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f''_{11}(2,2)+f'_2(2,2)f''_{12}(1,1).$$

(17) **解** 利用分部积分法可得

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)\mathrm{d}\sqrt{x}$$
$$=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$
$$=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}}-4\sqrt{x}$$
$$=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.$$

(18) **证** 设 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$,则

$$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2}.$$

令 $f'(x)=0$,解得驻点 $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$.

由单调性判别法知:

$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{3}]$ 上单调减少,在 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ 上单调增加,在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 上单调减少.

因为 $f(-\sqrt{3})=0$,且由上述单调性可知 $f(-\sqrt{3})$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{3}]$ 上的最小值,所以 $x=-\sqrt{3}$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{3}]$ 上唯一的零点.

又因为 $\quad f(\sqrt{3})=2\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)>0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,

所以由连续函数的介值定理知 $f(x)$ 在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内存在零点,且由

$f(x)$的单调性知零点唯一.

综上可知,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内恰有两个零点,即原方程恰有两个实根.

(19) **解** $$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(x+y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^t [f(t)-f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$=tf(t)-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

又 $$\iint\limits_{D_t} f(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{t^2}{2}f(t),$$

由题设有 $$tf(t)-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{t^2}{2}f(t).$$

两边求导整理得 $(2-t)f'(t)=2f(t)$,解得 $f(t)=\dfrac{C}{(2-t)^2}$.

代入$f(0)=1$,得 $C=4$,故

$$f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

(20) **解** (Ⅰ) 4 个 3 维向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$线性相关$(i=1,2,3)$,若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关,则$\boldsymbol{\alpha}_i$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示$(i=1,2,3)$,与题设矛盾,于是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关,从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0,$$

于是 $a=5$. 此时$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示.

(Ⅱ) 令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \vdots\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 对$\boldsymbol{A}$施以初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

从而

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(21) **解** (Ⅰ) 由于$\boldsymbol{A}$的秩为2,故0是$\boldsymbol{A}$的一个特征值. 由题设可得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以-1是$\boldsymbol{A}$的一个特征值,且属于-1的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,$k_1$为任意非零常数;1也是$\boldsymbol{A}$的一个特征值,且属于1的特征向量为$k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$k_2$为任意非零常数.

设$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{A}$的属于0的特征向量,由于$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵,则

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad (1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即

$$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}$$

于是属于0的特征向量为$k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$k_3$为任意非零常数.

(Ⅱ) 令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

于是

$$A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(22) **解** （Ⅰ）由 $P\{X^2=Y^2\}=1$ 得 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$,所以

$$P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0,$$

故(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

（Ⅱ）$Z=XY$ 的可能取值为$-1,0,1$. 由(X,Y)的概率分布可得 Z 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（Ⅲ）由 X,Y 及 Z 的概率分布得

$$EX=\frac{2}{3},\quad DX=\frac{2}{9},$$

$$EY=0,\quad DY=\frac{2}{3},$$

$$EZ=E(XY)=0,$$

所以 $$\mathrm{Cov}(X,Y)=0,\rho_{XY}=0.$$

(23) 解 (Ⅰ) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

X 的概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_0^x \mathrm{d}y=x$；

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$f_X(x)=\int_0^{2-x}\mathrm{d}y=2-x.$

综上所述，有

$$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\2-x, & 1<x\leqslant 2,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_y^{2-y}\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-y), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在 $Y=y$ $(0\leqslant y<1)$ 时，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-y)}, & y<x<2-y,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2012年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题及参考答案

数学(一)试题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^n n!$.

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\ (k=1,2,3)$,则有

(A) $I_1<I_2<I_3$.　(B) $I_3<I_2<I_1$.　(C) $I_2<I_3<I_1$.　(D) $I_2<I_1<I_3$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布,则 $P\{X<Y\}=$

(A) $\dfrac{1}{5}$.　(B) $\dfrac{1}{3}$.　(C) $\dfrac{2}{3}$.　(D) $\dfrac{4}{5}$.

(8) 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段,则两段长度的相关系数为

(A) 1.　(B) $\dfrac{1}{2}$.　(C) $-\dfrac{1}{2}$.　(D) -1.

二、填空题. 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$,则 $f(x)=$ ________.

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ ________.

(11) $\mathbf{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

(12) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$,则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件,A 与 C 互不相容,$P(AB)=\dfrac{1}{2}$,$P(C)=\dfrac{1}{3}$,则 $P(AB\mid\overline{C})=$ ________.

三、解答题:第 15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18)(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}\right)$,其中函数 $f(t)$ 具有连续导数,且 $f(0)=0,f'(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$.若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1,求函数 $f(t)$ 的表达式,并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19)(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点$(2,0)$,再

沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点(0,2)的曲线段. 计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 设 $Z=X-Y$.

（Ⅰ）求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$；

（Ⅱ）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

（Ⅲ）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

数学(一)试题参考答案

一、选择题

(1)C (2)A (3)B (4)D (5)C (6)B (7)A (8)D

二、填空题

(9)e^x (10)$\frac{\pi}{2}$ (11)$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ (12)$\frac{\sqrt{3}}{12}$ (13)2 (14)$\frac{3}{4}$

三、解答题

(15) **证** 记$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-\frac{x^2}{2}-1$,则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-1-\cos x.$$

当$-1<x<1$时,由于$\frac{4}{(1-x^2)^2}\geqslant 4$,$1+\cos x\leqslant 2$,所以$f''(x)\geqslant 2>0$,从而$f'(x)$单调增加.

又因为$f'(0)=0$,所以,当$-1<x<0$时,$f'(x)<0$;当$0<x<1$时,$f'(x)>0$,于是$f(0)=0$是函数$f(x)$在$(-1,1)$内的最小值.

从而当$-1<x<1$时,$f(x)\geqslant f(0)=0$,即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}.$$

(16) **解** 因为

$$f'_x=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ f'_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

令$\begin{cases}f'_x=0,\\ f'_y=0,\end{cases}$得驻点$(1,0)$和$(-1,0)$.

记
$$A=f''_{xx}=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$
$$B=f''_{xy}=y(x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$
$$C=f''_{yy}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

在点$(1,0)$处,由于
$$B^2-AC=-2e^{-1}<0,\ A=-2e^{-\frac{1}{2}}<0,$$
所以$f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$是$f(x,y)$的极大值.

在点$(-1,0)$处,由于
$$B^2-AC=-2e^{-1}<0,\ A=2e^{-\frac{1}{2}}>0,$$
所以$f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$是$f(x,y)$的极小值.

(17)**解** 记$a_n=\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$,所以原级数的收敛半径为1.

又因为当$x=\pm1$时,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}$发散,所以幂级数的收敛域是$(-1,1)$.

记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$.

由于
$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'$$
$$=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'$$
$$=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\ (-1<x<1),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(0<|x|<1),$$

又 $S(0)=3$，所以和函数 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1,\\ 3, & x=0.\end{cases}$

(18) **解** 曲线 L 的切线斜率 $k=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}$，切线方程为

$$y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}[x-f(t)].$$

令 $y=0$，得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0=f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}+f(t)$.

由题意得 $\left[f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}\right]^2+\cos^2 t=1$.

因为 $f'(t)>0$，解得 $f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}=\dfrac{1}{\cos t}-\cos t$.

由于 $f(0)=0$，所以 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$.

因为 $f(0)=0,\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}f(t)=+\infty$，所以以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域是无界区域，其面积为

$$S=\int_0^{+\infty}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\pi.$$

(19) **解** 取 L_1 为有向线段 $x=0,y$ 从 2 到 0；由 L 与 L_1 围成的平面区域记为 D. 根据格林公式，得

$$I = \int_L 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3 + x - 2y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L+L_1} 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3 + x - 2y)\mathrm{d}y - \int_{L_1} 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3 + x - 2y)\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial(x^3 + x - 2y)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_2^0 (-2y)\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^2 2y\mathrm{d}y$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} - 4$$

$$= \frac{\pi}{2} - 4.$$

(20) **解** （Ⅰ）$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.$

（Ⅱ）若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由（Ⅰ）可得 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

于是 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta})$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

当 $a=-1$ 时，

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

于是 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = 3 < 4$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

此时其通解为

$$x=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},k\text{ 为任意常数.}$$

(21) **解** (Ⅰ) 因为 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$,对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以当 $a=-1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ) 由于 $a=-1$,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=2$ 时,由方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得属于 2 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_2=6$ 时,由方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得属于 6 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_3=0$ 时,由方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得属于 0 的一个单位特征向量

$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $f=2y_1^2+6y_2^2$.

(22) **解** (Ⅰ) $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}$.

(Ⅱ) 由 (X,Y) 的概率分布可得,X,Y,XY 的概率分布分别为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

所以

$$EX=\frac{2}{3},EY=1,E(Y^2)=\frac{5}{3},DY=\frac{2}{3},$$

$$E(XY)=\frac{2}{3},\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0,$$

故
$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-DY=-\frac{2}{3}.$$

(23)解　(Ⅰ)因 X 与 Y 相互独立,所以 $Z=X-Y$ 服从正态分布,且 $EZ=0,DZ=DX+DY=3\sigma^2$,故得 Z 的概率密度为

$$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},-\infty<z<+\infty.$$

(Ⅱ)设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的观测值,则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=(6\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2},$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(6\pi\sigma^2)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2.$$

令 $\frac{d(\ln L)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$,解得　$\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$,

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$.

(Ⅲ)因 $E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}EZ_i^2=\frac{1}{3}EZ^2=\frac{1}{3}DZ=\sigma^2$,所以 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

数学(二)试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

(3) 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\,dx\ (k=1,2,3)$,则有

(A) $I_1<I_2<I_3$.　(B) $I_3<I_2<I_1$.　(C) $I_2<I_3<I_1$.　(D) $I_2<I_1<I_3$.

(5) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$.　　(B) $x_1>x_2,y_1>y_2$.

(C) $x_1<x_2,y_1<y_2$.　　(D) $x_1<x_2,y_1>y_2$.

(6) 设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\dfrac{\pi}{2},y=1$ 围成,则 $\iint\limits_D(xy^5-1)\,dx\,dy=$

(A) π. (B) 2. (C) -2. (D) $-\pi$.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

二、填空题. 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$ = ________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(12) 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ________.

(13) 曲线 $y=x^2+x$ $(x<0)$ 上曲率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的点的坐标是________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量，求常数 k 的值.

(16)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)（本题满分 12 分）

过点 $(0,1)$ 作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

(19)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的表达式；

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}$ $(-1<x<1)$.

(21)(本题满分 10 分)

(Ⅰ) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(Ⅱ) 记(Ⅰ)中的实根为 x_n,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ) 当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ) 求实数 a 的值;

(Ⅱ) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

数学(二)试题参考答案

一、选择题

(1)C (2)A (3)B (4)D (5)D (6)D (7)C (8)B

二、填空题

(9)1 (10)$\frac{\pi}{4}$ (11)0 (12)$\sqrt{x}$ (13)(-1,0) (14)-27

三、解答题

(15)(Ⅰ)**解** 由题意

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{2x}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(Ⅱ)**解法1** 因为

$$
\begin{aligned}
f(x)-a &= \frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1\\
&= \frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x\sin x},
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-\cos x-\sin x-x\cos x}{(k+2)x^{k+1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2+\sin x-2\cos x+x\sin x}{(k+2)(k+1)x^k}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+3\sin x+x\cos x}{(k+2)(k+1)kx^{k-1}}.$$

所以，当 $k=1$ 时，有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\frac{1}{6}$. 此时 $f(x)-a$ 与 x 是同阶无穷小量 $(x\to0)$，因此 $k=1$.

解法 2 因为 $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-x^2+o(x^3)}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^{k+2}},$$

可知当 $3=k+2$ 时，$f(x)-a$ 与 x 是同阶无穷小量，因此 $k=1$.

(16) **解** 因为

$$f'_x=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ f'_y=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

令 $\begin{cases}f'_x=0,\\ f'_y=0,\end{cases}$ 得驻点 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$.

记
$$A=f''_{xx}=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$B=f''_{xy}=y(x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$C=f''_{yy}=x(y^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

在点 $(1,0)$ 处，由于

$$B^2-AC=-2e^{-1}<0,\ A=-2e^{-\frac{1}{2}}<0,$$

所以$f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$是$f(x,y)$的极大值.

在点$(-1,0)$处,由于

$$B^2-AC=-2e^{-1}<0,\ A=2e^{-\frac{1}{2}}>0,$$

所以$f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$是$f(x,y)$的极小值.

(17) **解** 设切点A的坐标为(x_1,y_1),则切线方程为

$$y-y_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1),$$

将点$(0,1)$代入,得$x_1=e^2,y_1=2$.

所求面积为

$$S=\int_1^{e^2}\ln x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot 2$$
$$=x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\mathrm{d}x-e^2+1$$
$$=2e^2-e^2+1-e^2+1$$
$$=2.$$

所求体积为

$$V=\pi\int_1^{e^2}\ln^2x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(e^2-1)$$
$$=\pi(x\ln^2x-2x\ln x+2x)\Big|_1^{e^2}-\frac{4\pi}{3}(e^2-1)$$
$$=\frac{2\pi}{3}(e^2-1).$$

(18) **解法1**

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\iint_D r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4[1-(1+\cos\theta)]\mathrm{d}(1+\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}(1+\cos\theta)^5\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{6}(1+\cos\theta)^6\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{2^5}{5}+\frac{2^6}{6}\right)$$

$$= \frac{16}{15}.$$

解法 2 $\displaystyle\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$

$$\xlongequal{\text{令}\cos\theta=t} \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1+t)^4 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(t+4t^2+6t^3+4t^4+t^5)\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^1(t^2+t^4)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{16}{15}.$$

(19) **解** (Ⅰ) 联立 $\begin{cases} f''(x)+f'(x)-2f(x)=0, \\ f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x, \end{cases}$

得 $f'(x)-3f(x)=-2\mathrm{e}^x$，因此

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\left[\int(-2\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$

$$=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x},$$

代入 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，得 $C=0$，所以

$$f(x)=\mathrm{e}^x.$$

(Ⅱ) $\displaystyle y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$

$$y'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+1,$$

$$y''=2x+2(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

当 $x<0$ 时，$y''<0$；当 $x>0$ 时，$y''>0$. 又 $y(0)=0$，所以曲线的拐点为

(0,0).

(20) **证** 记$f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-\dfrac{x^2}{2}-1$,则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-1-\cos x.$$

当$-1<x<1$时,由于$\dfrac{4}{(1-x^2)^2}\geqslant 4$,$1+\cos x\leqslant 2$,所以$f''(x)\geqslant 2>0$,从而$f'(x)$单调增加.

又因为$f'(0)=0$,所以,当$-1<x<0$时,$f'(x)<0$;当$0<x<1$时,$f'(x)>0$,于是$f(0)=0$是函数$f(x)$在$(-1,1)$内的最小值.

从而当$-1<x<1$时,$f(x)\geqslant f(0)=0$,即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}.$$

(21)(Ⅰ)**证** 令$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1\ (n>1)$,则$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上连续,且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0,f(1)=n-1>0,$$

由闭区间上连续函数的介值定理知,方程$f(x)=0$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$内至少有一个实根.

当$x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$时,

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>1>0,$$

故$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$内单调增加.

综上所述,方程$f(x)=0$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根.

（Ⅱ）**解** 由 $x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 知数列 $\{x_n\}$ 有界，又

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1,$$
$$x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}=1.$$

因为 $x_{n+1}^{n+1}>0$，所以

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n>x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1},$$

于是有

$$x_n>x_{n+1}, n=1,2,\cdots,$$

即 $\{x_n\}$ 单调减少.

综上所述，数列 $\{x_n\}$ 单调有界，故 $\{x_n\}$ 收敛.

记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1,$$

令 $n\to\infty$ 并注意到 $\frac{1}{2}<x_n<x_1<1$，则有

$$\frac{a}{1-a}=1,$$

解得 $a=\frac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

(22) **解** （Ⅰ） $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1-a^4.$

（Ⅱ）若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由（Ⅰ）可得 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right),$$

于是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

当 $a=-1$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})=3<4$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

此时其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},k\text{ 为任意常数.}$$

（23）**解** （Ⅰ）因为 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$.

（Ⅱ）由于 $a=-1$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=2$ 时，由方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得属于 2 的一个单位特征向量 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=6$ 时，由方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得属于 6 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=0$ 时，由方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得属于 0 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $f=2y_1^2+6y_2^2$.

数学(三)试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^n n!$.

(3) 设函数 $f(t)$ 连续,则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)r\mathrm{d}r=$

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

(4) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛,则

(A) $0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$. (C) $1<\alpha\leqslant\dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$. (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从区间$(0,1)$上的均匀分布,则 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=$

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{\pi}{8}$. (D) $\frac{\pi}{4}$.

(8) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$的分布为

(A) $N(0,1)$. (B) $t(1)$. (C) $\chi^2(1)$. (D) $F(1,1)$.

二、填空题. 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$__________.

(10) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$,则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=e}=$ __________.

(11) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz\Big|_{(0,1)}=$ ________.

(12) 由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$ ________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

(16)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D e^x xy\,dx\,dy$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

(17)（本题满分 10 分）

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000（万元）. 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$（万元/件）与 $6+y$（万元/件）.

（Ⅰ）求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$（万元）；

（Ⅱ）当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小？求最小成本；

（Ⅲ）求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

（18）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$.

（19）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的表达式；

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

（20）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

（Ⅱ）当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解.

（21）（本题满分 11 分）

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

（22）（本题满分 11 分）

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布. 记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$.

（Ⅰ）求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

（Ⅱ）求 $E(U+V)$.

数学(三)试题参考答案

一、选择题

(1)C (2)A (3)B (4)D (5)C (6)B (7)D (8)B

二、填空题

(9)$e^{-\sqrt{2}}$ (10)$\frac{1}{e}$ (11)$2dx-dy$ (12) $4\ln 2$ (13)-27 (14)$\frac{3}{4}$

三、解答题

(15) 解

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}\cdot e^{2-2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}$$

$$=\frac{1}{12}.$$

(16) 解

$$\iint_D e^x xy\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1-x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x(1-x^2)\Big|_0^1+\int_0^1 xe^x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} + xe^{x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}.$$

(17) **解** (Ⅰ)由题设知

$$\frac{\partial C}{\partial x}=20+\frac{x}{2},\frac{\partial C}{\partial y}=6+y,C(0,0)=10\ 000,$$

从而有

$$C(x,y)=10\ 000+20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}.$$

(Ⅱ)由题设知 $x+y=50$,此时的成本函数为

$$f(x)=C(x,50-x)=10\ 000+20x+\frac{x^2}{4}+6(50-x)+\frac{(50-x)^2}{2},0\leqslant x\leqslant 50,$$

求导得

$$f'(x)=\frac{3x}{2}-36,$$

令 $f'(x)=0$,解得唯一驻点 $x=24$.

又 $f''(24)=\frac{3}{2}>0$,所以 $x=24$ 是成本函数 $C(x,50-x)$ 的最小值点.

故当甲为 24 件,乙为 26 件时,总成本达到最小,最小成本为

$$C(24,26)=11\ 118\text{ 万元}.$$

(Ⅲ) $\frac{\partial C}{\partial x}\Big|_{\substack{x=24\\y=26}}=\left(20+\frac{x}{2}\right)\Big|_{\substack{x=24\\y=26}}=32$,其经济意义为:当生产乙产品 26 件时,生产第 25 件甲产品需 32 万元.

(18) **证** 记 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-\frac{x^2}{2}-1$,则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-1-\cos x.$$

当 $-1<x<1$ 时,由于 $\frac{4}{(1-x^2)^2}\geqslant 4,1+\cos x\leqslant 2$,所以 $f''(x)\geqslant 2>0$,从而 $f'(x)$ 单调增加.

又因为$f'(0)=0$,所以,当$-1<x<0$时,$f'(x)<0$;当$0<x<1$时,$f'(x)>0$,于是$f(0)=0$是函数$f(x)$在$(-1,1)$内的最小值.

从而当$-1<x<1$时,$f(x)\geqslant f(0)=0$,即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}.$$

(19) **解** (Ⅰ) 联立 $\begin{cases}f''(x)+f'(x)-2f(x)=0,\\ f''(x)+f(x)=2e^x,\end{cases}$

得$f'(x)-3f(x)=-2e^x$,因此

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{\int 3dx}\left[\int(-2e^x)e^{-\int 3dx}dx+C\right]\\&=e^x+Ce^{3x},\end{aligned}$$

代入$f''(x)+f(x)=2e^x$,得$C=0$,所以

$$f(x)=e^x.$$

(Ⅱ) $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt,$

$$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1,$$

$$y''=2x+2(1+2x^2)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt,$$

当$x<0$时,$y''<0$;当$x>0$时,$y''>0$. 又$y(0)=0$,所以曲线的拐点为$(0,0)$.

(20) **解** (Ⅰ) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1-a^4.$

(Ⅱ) 若方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解,则$|\boldsymbol{A}|=0$. 由(Ⅰ)可得$a=1$或$a=-1$.

当$a=1$时,

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right),$$

于是 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta})$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

当 $a=-1$ 时，

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

于是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta})=3<4$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

此时其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数.}$$

(21) **解** （Ⅰ）因为 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$.

（Ⅱ）由于 $a=-1$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=6, \lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=2$ 时，由方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得属于 2 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=6$ 时，由方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得属于 6 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=0$ 时，由方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得属于 0 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $f=2y_1^2+6y_2^2$.

(22) **解** (Ⅰ) $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}$.

(Ⅱ) 由 (X,Y) 的概率分布可得 X,Y,XY 的概率分布分别为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

所以

$$EX=\frac{2}{3},EY=1,E(Y^2)=\frac{5}{3},DY=\frac{2}{3},$$

$$E(XY)=\frac{2}{3},\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0,$$

故
$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-DY=-\frac{2}{3}.$$

(23) (Ⅰ) **解** X 与 Y 的分布函数均为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$V=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_V(v)&=P\{\min\{X,Y\}\leqslant v\}\\&=1-P\{\min\{X,Y\}>v\}\\&=1-P\{X>v,Y>v\}\\&=1-[1-F(v)]^2\\&=\begin{cases}1-e^{-2v}, & v\geqslant 0,\\ 0, & v<0,\end{cases}\end{aligned}$$

故 V 的概率密度为

$$f_V(v)=F'_V(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & v\leqslant 0.\end{cases}$$

（Ⅱ）**解法 1** $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_U(u)&=P\{\max\{X,Y\}\leqslant u\}\\&=P\{X\leqslant u,Y\leqslant u\}\\&=F^2(u)\\&=\begin{cases}(1-e^{-u})^2, & u\geqslant 0,\\ 0, & u<0,\end{cases}\end{aligned}$$

故 U 的概率密度为

$$f_U(u)=F'_U(u)=\begin{cases}2e^{-u}(1-e^{-u}), & u>0,\\ 0, & u\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(U+V)&=EU+EV\\&=\int_0^{+\infty}2ue^{-u}(1-e^{-u})\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}2ue^{-2u}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}2ue^{-u}\mathrm{d}u=2.\end{aligned}$$

解法2 因为 $U+V=\min\{X,Y\}+\max\{X,Y\}=X+Y$，故

$$E(U+V)=E(X+Y)=EX+EY=2.$$